Chapitre 15 : Relations de comparaison

Table des matières

1 Relations de comparaison sur les suites

1.1 Domination

Définition 1.1 (relation de domination sur les suites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.
On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
On dit que $\underline{(u_n) \text{ est dominée par } (v_n)}$, ce que l'on note « $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ » ou « $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ », si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$, définie à partir d'un certain rang, est bornée.

Reformulation avec des quantificateurs :

$$u_n = \mathrm{O}(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant M|v_n|$$

Dans cette dernière écriture, on peut s'affranchir de l'hypothèse sur la suite (v_n), ce qui permet d'étendre la définition pour des suites quelconques. Les propriétés seront énoncées sans cette hypothèse, néanmoins les démonstrations seront réalisées sous celle-ci.

Remarques :
- $u_n = \mathrm{O}(1)$ signifie que (u_n) est bornée.
- La suite nulle est dominée par n'importe quelle suite.

Exemple 1.2 : Soient $d \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $\leqslant d$. Alors $P(n) = \mathrm{O}(n^d)$.

Proposition 1.3 (domination et limite)

Soient deux suites numériques (u_n) et (v_n).
On suppose que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.
1. Si $v_n \to 0$, alors $u_n \to 0$.
2. Si $|u_n| \to +\infty$, alors $|v_n| \to +\infty$.

Proposition 1.4 (transitivité de la relation O)

Soient trois suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n).
Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, alors $u_n = \mathrm{O}(w_n)$.

Proposition 1.5 (compatibilité de la relation O avec les opérations)

Soient des suites numériques (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n).
1. Si $u_n = \mathrm{O}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, alors pour tous λ et $\mu \in \mathbb{C}$, $\lambda u_n + \mu v_n = \mathrm{O}(w_n)$.
2. Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $u_n w_n = \mathrm{O}(v_n w_n)$.
3. Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $w_n = \mathrm{O}(x_n)$, alors $u_n w_n = \mathrm{O}(v_n x_n)$.
4. Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et (u_n) et (v_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{v_n} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

1.2 Négligeabilité

Définition 1.6 (relation de négligeabilité sur les suites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.
On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), ce que l'on note « $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ », ou « $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ », ou bien encore « $u_n \ll v_n$ », si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Reformulation avec des quantificateurs :

$$u_n = \mathrm{o}(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$

On peut ainsi s'affranchir de l'hypothèse sur la suite (v_n) et donc étendre la définition pour des suites quelconques. Les propriétés seront énoncées sans cette hypothèse, néanmoins les démonstrations seront réalisées sous celle-ci.

Remarques :
- $u_n = \mathrm{o}(1)$ signifie que $u_n \to 0$.
- La suite nulle est négligeable devant n'importe quelle suite.

Exemple 1.7 : Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$. Si $\alpha < \beta$, alors $n^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta)$. Soient q et $r \in \mathbb{C}$. Si $|q| < |r|$, alors $q^n = \mathrm{o}(r^n)$.

Proposition 1.8 (o implique O)

Soient deux suites numériques (u_n) et (v_n).
Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

Remarque : En particulier :
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n \to 0$, alors $u_n \to 0$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $|u_n| \to +\infty$, alors $|v_n| \to +\infty$.

Proposition 1.9 (transitivité de la relation o)

Soient trois suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n).
Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.

Remarque : Plus généralement, on a les implications suivantes.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$, alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.
- Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.

Proposition 1.10 (compatibilité de la relation o avec les opérations)

Soient des suites numériques (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n).
1. Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors pour tous λ et $\mu \in \mathbb{C}$, $\lambda u_n + \mu v_n = \mathrm{o}(w_n)$.
2. Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n w_n = \mathrm{o}(v_n w_n)$.
3. Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $w_n = \mathrm{o}(x_n)$, alors $u_n w_n = \mathrm{o}(v_n x_n)$.
4. Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et (u_n) et (v_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{v_n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

Traduction des résultats sur les croissances comparées : Soient $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma$ et $\gamma' \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\mathbf{e}^{-\gamma' n} \ll n^{-\beta'} \ll \ln^{-\alpha'}(n) \ll 1 \ll \ln^{\alpha}(n) \ll n^{\beta} \ll \mathbf{e}^{\gamma n}$$

1.3 Équivalence

Définition 1.11 (relation d'équivalence sur les suites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.
On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
On dit que $\underline{(u_n) \text{ est équivalente à } (v_n)}$, ce que l'on note « $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ » ou « $u_n \sim v_n$ », si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Reformulation :

$$u_n \sim v_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$

Autrement dit : $\boxed{u_n \sim v_n \quad \Leftrightarrow \quad u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)}$ (ce qu'on écrit aussi $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$).
On peut ainsi s'affranchir de l'hypothèse sur la suite (v_n) et donc étendre la définition pour des suites quelconques. Les propriétés seront énoncées sans cette hypothèse, néanmoins les démonstrations seront réalisées sous celle-ci.

Remarques :

1. Soit $\ell \in \mathbb{C}^*$. $u_n \sim \ell$ signifie que $u_n \to \ell$.
2. **Une suite n'est jamais équivalente à 0**, sauf si elle est nulle à partir d'un certain rang.

Exemple 1.12 : Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X] \backslash \{0\}$, on a $P(n) \sim a_{\deg(P)} n^{\deg(P)}$.

Proposition 1.13 (réflexivité, symétrie et transitivité de l'équivalence)

Soient trois suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n).

- Réflexivité : $u_n \sim u_n$.
- Symétrie : Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$.
- Transitivité : Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

Proposition 1.14 (obtention d'un équivalent par encadrement)

Soient trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.
Si $u_n \sim w_n$ alors $v_n \sim u_n$.

Proposition 1.15 (propriétés conservées par équivalence)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.
On suppose que $u_n \sim v_n$.

1. Si (u_n) et (v_n) sont des suites réelles, u_n et v_n ont le même signe à partir d'un certain rang.
2. Si l'une des deux suites possède une limite, alors l'autre également et les deux limites sont égales.

Proposition 1.16 ($\sim$ implique O)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.
Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

Proposition 1.17 (opérations sur les équivalents)

Soient (u_n), (v_n), (u'_n) et (v'_n) des suites numériques.

1. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.
2. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $\dfrac{u_n}{u'_n} \sim \dfrac{v_n}{v'_n}$ (lorsque ces suites sont bien définies).
3. Si $u_n \sim v_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors ${u_n}^\alpha \sim {v_n}^\alpha$ (lorsque ces suites sont bien définies).

Attention :

- en général, on ne peut pas sommer des équivalents : $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n \not\Rightarrow u_n + u'_n \sim v_n + v'_n$.
  En effet, $n \sim n$ et $-n+1 \sim -n$ mais $1 \not\sim 0$.
- en général, on ne peut pas composer par une fonction : $u_n \sim v_n \not\Rightarrow f(u_n) \sim f(v_n)$.
  En effet, $n^2 + n \sim n^2$ mais $\mathbf{e}^{n^2+n} \not\sim \mathbf{e}^{n^2}$.
- En général, on peut uniquement élever à la puissance si celle-ci ne dépend pas de n : $u_n \sim v_n \not\Rightarrow u_n^{\alpha_n} \sim v_n^{\alpha_n}$.
  En effet, $(1 + \frac{1}{n}) \sim 1$ mais $(1 + \frac{1}{n})^n \not\sim 1$.

Exemple 1.18 : Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \in \mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$, on a $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \sim \dfrac{a_{\deg(P)}}{b_{\deg(Q)}} n^{\deg(P)-\deg(Q)}$

Exemple 1.19 : Déterminer un équivalent simple de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-3n+1)\sqrt{\dfrac{6n+7}{2n^3+3}}$.

Théorème 1.20 (formule de Stirling, admis et hors programme)

$$n! \sim n^n\, \mathbf{e}^{-n} \sqrt{2\pi n} = \left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

2 Relations de comparaison sur les fonctions

Dans cette partie, on considère f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I non trivial et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I.

Définition 2.1 (relations O, o et $\sim$ pour les fonctions)

On suppose que la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a.

1. $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
2. $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
3. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.

Reformulation avec des quantificateurs (pour $a \in \mathbb{R}$) :

1. $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta], |f(x)| \leqslant M|g(x)|$
2. $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta], |f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$
3. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta], |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$

Par conséquent : $\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}(g(x))}$

Dans ces écritures, on peut s'affranchir de l'hypothèse sur la fonction g, ce qui permet d'étendre la définition pour des fonctions quelconques. Les propriétés seront énoncées sans cette hypothèse, néanmoins les démonstrations seront réalisées sous celle-ci.

Exemple 2.2 : Soit $\varphi : x \mapsto x^2 + x + \ln(x)$. Déterminer des équivalents simples en 0 et en $+\infty$ de φ.

Exemples 2.3 : Soient deux réels α et β, avec $\alpha < \beta$. Alors :

$$x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^\beta) \qquad\qquad x^\beta \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^\alpha)$$

Tous les résultats vus pour les relations de comparaison sur les suites s'adaptent dans le cadre des fonctions.

Théorème 2.4 (croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle)

Soient α, β et $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\ln(x)^\gamma \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^\beta) \quad ; \quad x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathbf{e}^{\alpha x}) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{x\to 0^+}{=} \mathrm{o}(\ln(x)^{-\gamma})$$

Proposition 2.5 (obtention d'un équivalent par encadrement)

On suppose que f, g et h sont à valeurs réelles, que $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a et que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$. Alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

Proposition 2.6 (propriétés conservées par équivalence)

On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

1. Si f et g sont à valeurs réelles, f et g ont le même signe au voisinage de a.
2. Si l'une des deux fonctions possède une limite en a, alors l'autre également et les deux limites sont égales.

Théorème 2.7 (utilisation d'une dérivée pour déterminer un équivalent simple)

Soit f une fonction dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$.
Alors : $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$ *i.e.* $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$.

Équivalents usuels en 0 (à connaître) :

1. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
2. $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
3. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
4. $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
5. $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
6. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
7. $\mathbf{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
8. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \quad$ (pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$)

Remarque : On peut réécrire ses équivalents usuels sous forme de développement limité :

1. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$
2. $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$
3. $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$
4. $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$
5. $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$
6. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$
7. $\mathbf{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \mathrm{o}(x)$
8. $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \mathrm{o}(x)$ (pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$)

Proposition 2.8 (substitution dans les équivalents)

1. Substitution par une fonction :

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \\ \\ f(y) \underset{y\to b}{\sim} g(y) \end{array}\right\} \implies f \circ u(x) \underset{x\to a}{\sim} g \circ u(x)$$

2. Substitution par une suite :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b \\ \\ f(y) \underset{y\to b}{\sim} g(y) \end{array}\right\} \implies f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$$

Les résultats de substitutions sont valables aussi pour des O **et** o **au lieu de** $\sim$**.**

Exemple 2.9 : Déterminer un équivalent simple en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{\ln(1+x^2)}$ puis déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $g : x \mapsto \sqrt{x^3+1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exemple 2.10 : Déterminer un équivalent simple de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^3 \sin\left(\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{n^2+1}\right)$.